Et katalog over paradokser

Hans Hüttel

Oktober 2009

Øen i søen har kun én barber
Til gengæld så klipper han alt hvad han ser
Han klipper sin fætter, sin hund og sit får
Han klipper billetter, når færgerne går
Han klipper sin plæne, sin hæk og sit hegn
Men selv er han skaldet som Roskildevejen

Halfdan Rasmussen

Indhold

1 Hvad er denne artikel?

I denne artikel vil jeg kaste et blik på nogle af de bedst kendte paradokser i matematik og filosofi – og nogle af de mindre kendte. Den er blevet til i forbindelse med kurset *Paradoksernes historie*, der blev afholdt på Folkeuniversitetet i Aalborg søndag d. 25. oktober 2009.

Emnet er stort, og jeg vil da heller ikke påstå at denne artikel er udtømmende. I artiklen har jeg således ikke beskæftiget mig med f.eks. paradokser fra sandsynlighedsregning eller relativitetsteori. Afsnit 9 rummer forslag til videre læsning, bl.a. om disse emner.

2 Hvad er paradokser?

Ordet paradoks er (måske ikke overraskende) græsk, og dets oprindelse *paradoxa*, modsat-mening, mere end antyder hvad vi har med at gøre. Et paradoks er et par af velbegrundede påstande som strider mod hinanden.

Nogle fremstillinger bruger ordet 'paradoks' i en temmelig anderledes forstand end jeg vil gøre det her. F.eks. taler Søren Kierkegaard i sit *Afsluttende uvidenskabelig Efterskrift* om den sande kristendom som en paradoks religiøsitet i sin tro på at den evige gud blev menneske i tiden.

Denne artikel handler om *logiske* (ikke teologiske) paradokser. Nogle af paradokserne i denne artikel stammer fra matematikken, mens andre stammer fra sprogvidenskab. De allerfleste stammer dog fra filosofiens verden. Fælles for dem alle er at de stammer fra fag, hvor det logiske ræsonnement er en vigtig bestanddel. Så det kan ikke undre at de både har irriteret og inspireret.

Paradokser er sjove, men de er andet og mere end bare gåder. Historisk set har de logiske paradoksers rolle nemlig typisk været at påpege begrænsningerne i det begrebsapparat, hvori paradokset blev formuleret. Løsningen på et paradoks er derfor at *man ændrer sit begrebsapparat* – typisk ved at 'bortdefinere paradokset'.

Der er dog også nogle moderne filosoffer som har valgt en anden tilgang – nemlig ved at hævde at logiske paradokser ikke nødvendigvis skal forsøges løst. Disse filosoffer vil hævde at der findes påstande som er paradoksale, men sande. Denne temmelig kontroversielle holdning kaldes *dialeteisme* efter det græske ord *dialetheia*, der betegner en sætning A hvorom det gælder at både A og ikke-A er sande.

3 Klassiske paradokser

Som ordet paradoks antyder, stammer de første paradokser fra oldtidens Grækenland.

3.1 Sorites-paradokset

Sorites-paradokset (*sorites* er latin og betyder 'bunkeslutning') stammer fra antikken og nævnes bl.a. af Aristoteles.

Lad os betragte en stor bunke sten. Vi fjerner en enkelt sten og har naturligvis stadig en stor bunke sten. Sådan bliver vi ved med at fjerne sten. På et tidspunkt er vi nede på 2 sten, og vi har ikke længere en stor bunke sten. Hvornår holdt vi op med at have en stor bunke sten?

Dette at være 'en stor bunke sten' er et *vagt begreb*, og sorites-paradokset viser problemerne ved vage begreber. Vage begreber ser ud til at være tolerante i den forstand at der til ethvert vagt begreb er knyttet et begreb om *uskelnelighed* – et objekt a og et objekt b er uskelnelige i forhold til vores vage begreb, hvis de begge opfylder det. For eksempel er to stenbunker uskelnelige, hvis de begge er ‘store bunker sten’.

Men det gælder *ikke* automatisk at hvis a og b er uskelnelige, og b og c er uskelnelige, så er a og c også uskelnelige. Begreberne er jo *vage*, og uskelnelighedsrelationen er derfor ikke transitiv (se afsnit 7.2 for en forklaring af dette begreb.)

Løsningen på sorites-paradokset

Sorites-paradokset er interessant fordi dagligsproget er fuldt af vage begreber. Begrebet ’stor’ er et af dem. Et andet vagt begreb er ’interessant’, og det fører til et lignende paradoks som stammer fra 1945 og skyldes matematikeren Edwin Bechenbach.

Nogle naturlige tal er *interessante*. Primtal er f.eks. meget interessante. Kvadrattal er også interessante. Men så er der også naturlige tal som er *kedelige* – det er de tal som på ingen måde er interessante. Nu betragter vi så det mindste kedelige naturlige tal, x. Men hov! dette tal er jo faktisk interessant, for det har den enestående egenskab at være det mindste kedelige tal. Så det kan ikke være kedeligt. Men så er der det næstmindste kedelige tal. Det må så være det mest kedelige tal. Igen kan vi anvende ovenstående ræsonnement.

Der er altså ingen kedelige tal! Dette sjove paradoks viser ligesom sorites-paradokset problemerne med at lave præcise ræsonnementer om vage begreber som ’interessant’.

Den oplagte løsning er derfor ganske enkelt *at passe på i anvendelsen af vage begreber.*

Men spørgsmålet er: Hvorfor er nogle begreber vage? Skyldes det begreberne selv? Det kunne f.eks. være tilfældet med begrebet ’stor’. Men et andet vagt begreb er ’blå’ (eller andre farvebetegnelser). Man kan prøve at lave følgende lille eksperiment:

Tag et farvekort der viser farverne som et kontinuert spektrum. Lav et lille (!) hul i et stykke papir og læg det omtrent midt i det blå område på farvekortet. Farven som er synlig gennem hullet er blå. Hvis vi flytter hullet en lille (!) smule, vil den synlige farve stadig være blå. Men på et eller andet tidspunkt, hvis vi bliver ved med at flytte hullet, vil vi ende på et område af farvekortet der helt klart ikke er blåt!

Man kunne derfor også overveje om begrebet ’blå’ faktisk er vagt, ikke fordi det ikke i sig selv er veldefineret, men fordi vi mennesker ikke er i stand til at skelne ordentligt i kraft af vore dårlige sanser.

3.2 Zenons paradokser

Zenons paradokser er gengivet i Aristoteles' værk *Fysik* fra slutningen af det 4. årh. f.Kr. Zenon fra Elea (ca. 495-445 f.Kr.) var en græsk filosof der var af den opfattelse at al bevægelse var umulig. Zenons argumentation herfor bestod i at bevise umuligheden af bevægelse ved at søge at udlede en modstrid fra antagelsen af det modsatte (nemlig at bevægelse faktisk skulle være mulig). Zenon er den første filosof der anvender dette princip, det *indirekte bevis*.

De to første paradokser skal vise at bevægelse er umulige, hvis vi opfatter tid og rum som kontinuerte størrelser – d.v.s. uendeligt delelige. De to sidste paradokser skal vise at hvis vi omvendt antog at tid og rum bestod af udelelige 'atomer', da vil bevægelse også være umulig.

Halveringsparadokset

Det er umuligt at bevæge sig fra et punkt x til et andet punkt y – for først skal man tilbagelægge halvdelen af strækningen fra x til y, men inden da må først halvdelen af denne strækning tilbagelægges. Og så fremdeles.

Achilleus og skildpadden

Det bedst kendte af Zenons paradokser er formodentlig paradokset om Achilleus og skildpadden. Achilleus var en af heltene fra Homers Illiade og ifølge legenden en rapfodet løber. Men ifølge Zenon ville Achilleus ikke kunne vinde et væddeløb mod en skildpadde. For lad os sige at skildpadden havde fået et generøst forspring på 10 meter. Nu starter løbet, og Achilleus skal først nå at løbe de 10 meter op til skildpaddens startposition. Men imens han løber, løber skildpadden også. Og nu skal Achilleus nå frem til den position, skildpadden har nået. Men når han er nået dertil, har skildpadden igen flyttet sig. Og så fremdeles. Fremspringet bliver hele tiden mindre, men Achilleus vil aldrig kunne overhale skildpadden!

Den flyvende pil

Zenon mente heller ikke at en flyvende pil bevæger sig. For på ethvert tidspunkt vil den befinde sig på et bestemt sted. På dette tidspunkt bevæger den sig ikke, hvor den er, og heller ikke hvor den ikke er. Ergo bevæger pilen sig ikke!

Stadionparadokset

Betragt et stadion med 3 parallelle rækker af hver 4 soldater. Den første række, $AAAA$, er i hvile, mens de to andre, $BBBB$ og $CCCC$ løber hurtigt forbi i hver deres retning og parallelt med A-soldaternes række. Det tager hver B-soldat et udeleligt øjeblik at passere en A-soldat, men idet rækkerne $BBBB$ og $CCCC$ passerer $AAAA$ samtidig, passerer de også hinanden. Og mens en B-soldat bruger to øjeblikke til at passere to A-soldater, passerer han også samtidig fire C-soldater.

Konklusionen er da enten at en B-soldat passerer en C-soldat i løbet af en halv tidsenhed eller at en B-soldat bruger fire tidsenheder til at passere $CCCC$. Den første konklusion kan ikke passe, da den ville stride imod at der findes en mindste udelelighed, og den anden konklusion ville indebære at to tidsenheder var det samme som fire tidsenheder!

Løsningen på Zenons paradokser

Man opfatter ikke længere Zenons paradokser som paradokser. Zenon troede formodentlig heller ikke på dem selv! Men de viser at man i antik tænkning manglede et ordentligt matematisk begrebsapparat til at beskrive hvad der rent faktisk skete.

Der kom til at gå over 2000 år inden man kunne give en ordentlig matematisk forklaring på Zenons paradokser. I det 19- århundrede opstod begrebet*grænseværdi* i matematik, og det rettede op på dette forhold. Vi kan med dette begreb forstå at en uendelig følge af værdier kan *konvergere* til en *endelig grænseværdi*. Den uendelige sum

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\cdots$$

har således ifølge moderne matematik faktisk en værdi, nemlig 1. Dette begreb kendte Zenon ikke!

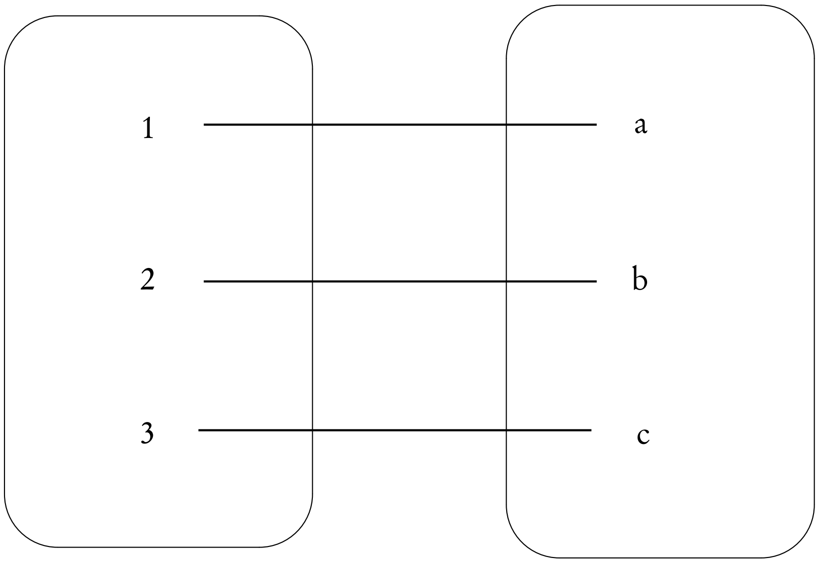
4 Paradokser om uendelige mængder

En del af matematikkens største og mest frugtbare paradokser kommer fra mængdeteorien og specielt fra studiet af uendelige mængder.

4.1 Lidt om kardinalitet

Kardinalitet er mængdeteoriens formulering af begrebet ‘størrelse af mængde’.

Intuitivt set er to mængder A og B lige store hvis man kan parre dem, således at der til hvert element i A tilordnes et og kun et element i B og sådan at ethvert element i B bliver parret med et og kun et element fra A.



Figur 1: Eksempel på parring mellem to mængder

Eksempel 1. Betragt mængderne $\{a, b, c\}$ og $\{1, 2, 3\}$. Vi kan let se at disse to mængder er lige store:

- a parres med 1
- b parres med 2
- c parres med 3

Denne parring er indtegnet i Figur 1. Dette er naturligvis ikke den eneste mulige parring – vi kunne også f.eks. have valgt at parre a med 2, b med 1 og c med 3.

Eksempel 2. Betragt mængderne $\{a, b, c\}$ og $\{1, 2, 3, 4\}$. Vi kan let se at disse to mængder ikke er lige store; ethvert forsøg på at parre elementerne i de to mængder vil føre til at et eller andet element i $\{1, 2, 3, 4\}$ ikke vil blive ramt. Men vi kan parre $\{a, b, c\}$ og $\{1, 2, 3\}$.

En parring mellem to mængder A og B der til ethvert element fra A tilordner et og kun et element fra B, kalder man en *funktion*. Så de parringer, vi betragter, er altså funktioner med særlige ekstraegenskaber; der er tale om de funktioner, som man kalder *bijektioner*.

Definition 1. En funktion f fra mængden A til mængden B kalder vi en *bijektion* hvis den opfylder følgende to betingelser:

1. Forskellige elementer i A bliver parret med forskellige elementer i B. D.v.s. at hvis $f(x) = f(y)$, så har vi at $x = y$. Et andet ord for dette er at f er *enentydig*.

2. Alle elementer i B bliver parret med et element fra A. D.v.s. at ligegyldigt hvilket element z i B vi betragter, så er der et eller andet x i A så $f(x) = z$. Et andet ord for dette er at f er *på*.

Definition 2. Lad A og B være vilkårlige mængder. Vi siger at A og B *har samme kardinalitet* hvis der findes en bijektion $f : A \to B$.

Så to mængder har samme kardinalitet hvis de kan parres. I mængdeteori kan man også sammenligne mængder der ikke har samme kardinalitet. Det gør det muligt at finde ud af hvilken af to mængder, der er størst.

Definition 3. Hvis A og B *ikke* har samme kardinalitet men der til gengæld findes en bijektion $f : A \to C$, hvor C er en ægte delmængde at B, d.v.s. at $C \subset B$, siger vi at B har *større kardinalitet end* A.

Eksempel 3. Lad os kaste et nyt blik på mængderne $\{a, b, c\}$ og $\{1, 2, 3, 4\}$ fra før. Vi kan let se at vi kan parre $\{a, b, c\}$ og $\{1, 2, 3\}$, så derfor kan vi konkludere at $\{1, 2, 3, 4\}$ har større kardinalitet end $\{a, b, c\}$.

4.2 Galileis paradoks om kvadrattal

De definitioner, vi her har set, fanger på udmærket vis vores dagligdags begreb om 'at være lige stor'.

Men det kardinalitetsbegreb, som Definition 2 giver os, er så generelt at vi uden videre kan bruge det til at *sammenligne uendelige mængder* med. Allerede den italienske matematiker og fysiker Galileo Galilei (1564–1642) kunne i 1600-tallet bevise nedenstående umiddelbart overraskende resultat:

Sætning 1. *Mængden af naturlige tal* $\{1, 2, 3 \ldots\}$ *og mængden af kvadrattal* $\{1, 2, 4 \ldots\}$ *har samme kardinalitet.*

Parringen er faktisk enkel at finde frem til. Vi lader 1 blive parret med det 1. kvadrattal, 2 blive parret med det 2. kvadrattal, 3 blive parret med det 3. kvadrattal og så fremdeles:

Figur 2: Galileo Galilei

$$
\begin{array}{cccccc}
1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \dots \\
\Bigg| & \Bigg| & \Bigg| & \Bigg| & \Bigg| & \Bigg| \\
1 & 4 & 9 & 16 & 25 & \dots
\end{array}
$$

Det vi beskriver her, er funktionen f givet ved $f(n) = n^2$. Alle kvadrattal er forskellige, så f er enentydig. Og det er heller ikke svært at se at alle kvadrattal bliver ramt af f, for hvis vi har et kvadrattal i^2, bliver det ramt af f, for $f(i) = i^2$.

Løsningen på Galileis paradoks

Galileis resultat blev i sin tid opfattet som et paradoks; det virker underligt at en mængde ikke er 'større end' en af sine egne delmængder og det modsiger unægtelig talemåden om at helheden er altid er større end dens bestanddele.

Men konklusionen blev at man måtte acceptere at uendelige mængder simpelthen opfører sig anderledes end endelige mængden! Faktisk blev Galileis egenskab senere, nemlig hos Cantor, ganske enkelt definitionen af uendelighed:

Definition 4. En mængde A er *uendelig* hvis der findes en ægte delmængde B af A (d.v.s. at $B \subset A$) hvorom det gælder at A og B har samme kardinalitet.

Det er klart at hvis A er en endelig mængde, da kan den ikke opfylde betingelserne i ovenstående definition.

Et andet begreb, som også tit dukker op, er begrebet *tællelighed*. En mængde er tællelig hvis den enten er endelig eller har samme kardinalitet som de naturlige tal.

En mængde er med andre ord tællelig hvis vi kan tælle dens elementer:

- Element nummer 1
- Element nummer 2
- Element nummer 3
- ... og så fremdeles

og denne tælleproces fører til at vi får mødt alle elementer.

4.3 Cantors resultater om uendelighed

Det var den tyske matematiker Georg Cantor (1845-1918), der formulerede teorien om kardinalitet for uendelige mængder. Georg Cantor blev født i Sankt Petersborg; hans far, Georg Waldemar Cantor, var dansker og handelsmand, mens moderen, Maria Anna Böhm, var russer og en talentfuld musiker. Da Cantor var 11, flyttede hele familien til Tyskland - først til Wiesbaden og senere til Frankfurt am Main.

Cantor blev i 1872, da han altså var 27 år, ansat som professor i en specielt oprette stilling ved universitetet i Halle. I de kommede år, frem til omkring 1886 skaber Cantor grundlaget for moderne mængdelære – således er det ham, der er ophavsmand til begrebet bijektion.

Cantors blev hyldet af sin samtid og fik æresdoktortitler i udlandet, men privat var han ikke lykkelig – han led af klinisk depression. I de sidste 20 år af sit liv var Cantor derfor stadigt oftere nødt til at holde orlov fra sin akademiske gerning og tilbringe tid på nervesanatorier.

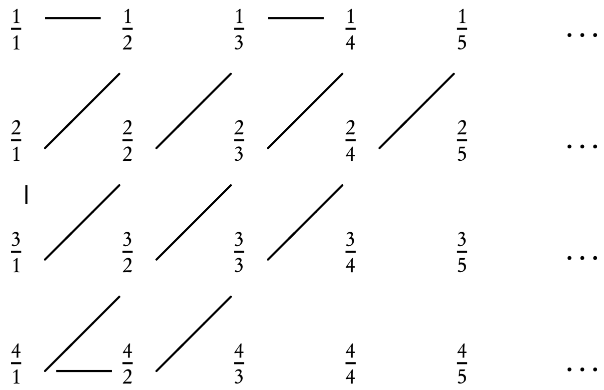
Figur 3: Georg Cantor

Der er ikke flere brøker end naturlige tal

Et af Cantors overraskende resultater om uendelige mængder stammer fra 1873 – mængden af rationelle tal er tællelig! De rationelle tal er alle tal som kan skrives som brøker eller blandede tal. Så 7 er et rationelt tal. $4,2$ er også et rationelt tal, da det kan skrives som $4\frac{2}{10}$. Tal som π og $\sqrt{2}$ er til gengæld *ikke* rationelle tal.

Man skulle umiddelbart tro at der var mange flere rationelle tal end naturlige tal. Man kan f.eks. vise at der, ligegyldigt hvilke to rationelle tal x og y vi kigger på, findes et rationelt tal z så $x < z < y$. De rationelle tal ligger med andre ord *uendeligt tæt*. Men der er altså ikke flere rationelle tal end der er naturlige tal.

Hvordan tæller man de rationelle tal? Figur 4.3 viser hvordan. Eller rettere – figuren viser hvordan vi tæller *brøker*, og det er nok. Der er nemlig ikke flere rationelle tal end brøker – alle rationelle tal kan beskrives ved mange forskellige brøker. F.eks. kan 2 beskrives som $\frac{2}{1}$ eller $\frac{4}{2}$ eller $\frac{6}{3}$ eller ... Dette er dog ikke vigtigt her.



Figur 4: Udsnit af bijektionen mellem naturlige tal og brøker (Cantors første diagonaliseringsprincip)

Vi laver først et uendeligt skema. I række 1 skriver vi alle brøker, hvis tæller er 1, i række 2 skriver vi alle brøker, hvis tæller er 2 og i række n skriver vi alle brøker hvis tæller er n. Det er klart at enhver brøk vil være at finde præcis ét sted i dette skema.

Nu går vi igennem skemaet ved at siksakke som vist på Figur 4.3 – vi starter i øverste venstre hjørne i $\frac{1}{1}$, går et skridt mod højre til $\frac{1}{2}$ og derefter mod venstre ned ad den lille diagonal til $\frac{2}{1}$. Herefter går vi ned til $\frac{3}{1}$ og op langs næste lille diagonal til $\frac{2}{2}$ og $\frac{1}{3}$. Herefter gentager vi mønsteret i det uendelige: Vi går til højre, derefter mod venstre ned ad en lille diagonal, så ned og derefter op ad næste lille diagonal.

Denne siksak-procedure vil efterhånden besøge alle brøker i skemaet, og hver brøk bliver besøgt præcis én gang. Så herved har vi fået konstrueret os en bijektion mellem mængden af brøker og de naturlige tal.

Denne idé skyldes Cantor og kaldes også for *Cantors første diagonaliseringsprincip* – der er nemlig også et andet diagonaliseringsprincip!

Konklusion: Der er ikke flere brøker end naturlige tal.

Der er flere slags uendelighed!

De reelle tal er alle de tal som kan skrives som decimaltal – hvor vi tillader uendeligt mange decimaler. Så 7, $4,9$ og π er alle eksempler på reelle tal.

De reelle tal er en uendelig mængde ...

Det er bestemt ikke overraskende at de reelle tal er en uendelig mængde. Men kan vi vise at de reelle tal er uendelige i den forstand, som 4 kræver?

Det kan vi faktisk! For man kan lave en bijektion mellem de reelle tal og det åbne interval $(0, 1)$ – d.v.s. alle reelle tal mellem 0 og 1.

Den naturlige logaritme $\ln x$ har flere rare egenskaber, som vi tilsammen kan bruge til at lave sådan en bijektion med:

- $\ln x$ er voksende.
- Hvis x er meget tæt på 0, er $\ln x$ et meget stort negativt tal.
- Hvis to tal har samme naturlige logaritme, er de ens. D.v.s. at hvis $\ln x = \ln y$, så har vi at $x = y$. Det betyder at den naturlige logaritme er en enentydig funktion.
- Hvis $x < 1$, har vi at $\ln x < 0$.
- $\ln 1 = 0$

Så funktionen

$$f(x) = \begin{cases} \ln 2x & \text{hvis } 0 < x < \frac{1}{2} \\ -\ln 2x & \text{hvis } \frac{1}{2} < x < 1 \end{cases}$$

er en bijektion mellem de reelle tal og intervallet $(0, 1)$.

... men der er flere reelle tal end naturlige tal

Et af Cantors andre overraskende resultater stammer fra 1874. Det er at mængden af reelle tal har større kardinalitet end mængden af naturlige tal. Der er altså *flere slags uendelighed* – mængden af reelle tal er 'mere uendelig' end mængden af naturlige tal. Det voldte Cantor ikke så lidt hovedbrud at finde frem til dette resultat.

Sætning 2. *Der er flere reelle tal end naturlige tal – mængden af reelle tal har større kardinalitet end mængden af naturlige tal.*

Det er nok at vise at det halvåbne interval $[0,1)$ har større kardinalitet end mængden af naturlige tal.

Lad os antage at det halvåbne interval $[0,1)$ faktisk havde samme kardinalitet som de naturlige tal. Vi kunne altså lave en bijektion mellem $[0,1)$ og de naturlige tal. Sagt på en anden måde: Vi kunne tale om reelt tal nummer 1, reelt tal nummer 2 og så videre og være sikker på at vi fik alle reelle tal i intervallet med. Vi kunne skrive tallene op i et skema som i Figur 4.3.

3	1	3	2	4	r_1
1	7	6	3	5	r_2
0	2	8	6	6	r_3
5	5	4	4	9	r_4
2	7	9	6	4	r_5

Figur 5: Udsnit af hypotetisk skema over de reelle tal i intervallet $[0;1]$ (det foranstående 0, er udeladt)

Men vi kan faktisk nu konstruere et reelt tal i $[0,1)$ som *ikke* er kommet med. Dette gør vi ved følgende uendelige procedure, der finder de uendeligt mange decimaler i tallet: Vi følger den store diagonal i skemaet på Figur 4.3 fra øverste venstre hjørne og ned mod højre. På hver plads vælger vi et eller andet ciffer der er forskelligt fra det ciffer, der står. I Figur 4.3 kunne vi f.eks. starte med at vælge de fem cifre 46733.

På denne måde får vi konstrueret et decimaltal, der er i intervallet $[0,1)$ men ikke kan være ramt af vores bijektion – for tallet er jo i den i'te decimal forskellig fra r_i's i'te decimal!

Der er en lille detalje i konstruktionen, der kræver lidt opmærksomhed: Nogle reelle tal kan skrives på mere end én måde. F.eks. er $0,4999999\ldots$ og $0,5$ samme tal. Så for en sikkerheds skyld vælger vi aldrig cifret 0 eller 9 i proceduren ovenfor.

Bevisideen i ovenstående kaldes, ikke overraskende, *Cantors andet diagonaliseringsprincip*.

Mængder af mængder ...

Et tredie af Cantors overraskende resultater handler om potensmængder, et vigtigt begreb i mængdeteori.

Definition 5. Lad A være en vilkårlig mængde. Samlingen af alle delmængder af A kaldes *potensmængden af A* og betegnes med $\mathscr{P}(A)$.

Eksempel 4. Lad A være mængden $\{1,2,3\}$. Så er $\mathscr{P}(A)$ mængden

$$\{\emptyset,\{1\},\{2\},\{3\},\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\},\{1,2,3\}\}$$

Cantor viste nu følgende resultat:

Sætning 3. *Lad A være en vilkårlig mængde. Så har $\mathscr{P}(A)$ større kardinalitet end A.*

Beviset er et indirekte bevis – vi starter med at tro på at A og $\mathscr{P}(A)$ har samme kardinalitet og opdager at det fører til en modstrid.

Antag nemlig at $\mathscr{P}(A)$ har samme kardinalitet som A. Så må det pr. definition være fordi der findes en bijektion f mellem A og $\mathscr{P}(A)$. Vi tror altså på at der findes en funktion f som til ethvert element x i A tilordner en delmængde af A, nemlig $f(x)$. Men betragt nu delmængden D givet ved

$$D = \{x \in A \mid x \notin f(x)\}$$

D er mængden af alle de elementer i A som ikke er med i deres eget billede under f. Spørgsmålet er nu: Bliver D selv ramt af f? Hvis ja, da må der være et y i A så $f(y) = D$.

Her er det, det går det galt. For enten må vi have at $y \in D$ eller $y \notin D$ – et element er jo altid enten med i eller ikke med i en mængde. Kan vi have at $y \in D$? Nej, for da y netop opfylder at $f(y) = D$, er y diskvalificeret fra medlemsskab i D. Så hvis $y \in D$ medfører det at $y \notin D$ – modstrid.

Jamen, så må det vel gælde at $y \notin D$. Men nej, heller ikke det kan passe. For igen husker vi at $f(y) = D$, så $y \notin f(y)$, og y er kvalificeret til medlemsskab i D. Så hvis $y \notin D$ medfører det at $y \in D$ – også en modstrid.

Konklusionen er at der *ikke* kan være et y i A så $f(y) = D$. Men det betyder så at D ikke bliver ramt af f. Og det er i modstrid med at f er en bijektion. Så *f kan ikke findes!*.

Man kan ved at stille et lille skema op se at ovenstående argument faktisk er Cantors andet diagonaliseringsprincip i forklædning! I øverste række skriver vi alle elementer i A op, og i søjlen til venstre skriver vi alle elementer i $\mathscr{P}(A)$. Hypotesen er at disse alle bliver ramt.

	x_1	x_2	x_3	x_4
$f(x_1)$	*ja*	*nej*	*ja*	*nej*
$f(x_2)$	*nej*	*nej*	*ja*	*ja*
$f(x_3)$	*nej*	*ja*	*ja*	*ja*
$f(x_4)$	*ja*	*nej*	*nej*	*ja*

Figur 6: Skema, der afslører at Cantors andet diagonaliseringsprincip er anvendt i beviset for Sætning 3

Mængden D er nu præcis de elementer i A som giver anledning til et *nej* i den store diagonal. Bliver D ramt? Hvis ja, hvad skal der så stå i diagonalen ud for D?

Cantors paradoks

Sætning 3 giver anledning til Cantors paradoks. Betragt nemlig mængden af alle mængder; lad os kalde den U. Da har vi at $\mathscr{P}(U)$ har større kardinalitet end U. Men $\mathscr{P}(U)$ er jo selv en mængde og må derfor være element i U, der jo er mængden af alle mængder!

Løsningen på Cantors paradoks

Løsningen på Cantors paradoks må være at 'mængden af alle mængder' ikke er en veldefineret størrelse i mængdeteori. Selve det at antage eksistensen af denne mængde fører nemlig til en modstrid.

4.4 Russells paradoks

Dette paradoks er faktisk også en anvendelse af diagonalisering. Det stammer fra maj 1901 og skyldes den betydningsfulde walisiske logiker, matematiker og filosof Bertrand Russell (1872-1970).

Bertrand Russell var et universalgeni – han skrev om matematik, logik, etik, moderne naturvidenskab, økonomi, fredsforskning og politik, og han fik i 1950 Nobelprisen i litteratur. Russell kom fra en adelig baggrund (i 1931 arvede han titlen Earl of Russell) men var politisk progressiv og blev blandt andet en ledende skikkelse i kampen mod atomvåben.

Og så lagde han navn til et paradoks. Russell var en grundlæggerne af moderne mængdeteori og matematisk logik; hans mål var at skabe et enkelt og modsigelsesfrit grundlag for al matematik.

Russell var inspireret af Gottlob Frege (1848–1925), der var professor ved universitetet i Jena og grundlæggeren af logicismen, den matematiske retning hvis mål var at finde et grundlag for al matematik udelukkende baseret på logik.

Mens Russell studerede første bind af Freges indflydelsesrige *Grundlagen der Arithmetik* fandt han på følgende mængde:

$$R = \{M \mid M \notin M\}$$

R er mængden af alle de mængder, der ikke indeholder sig selv som element. Gælder det at $R \in R$? Hvis det er tilfældet, må det være fordi R opfylder betingelserne for medlemsskab i R. Men så må vi have at $R \notin R$. Så det kan ikke passe. Gælder det så at $R \notin R$? Hvis ja, da opfylder R jo betingelserne for at være med i R. Og så må vi have at $R \in R$.

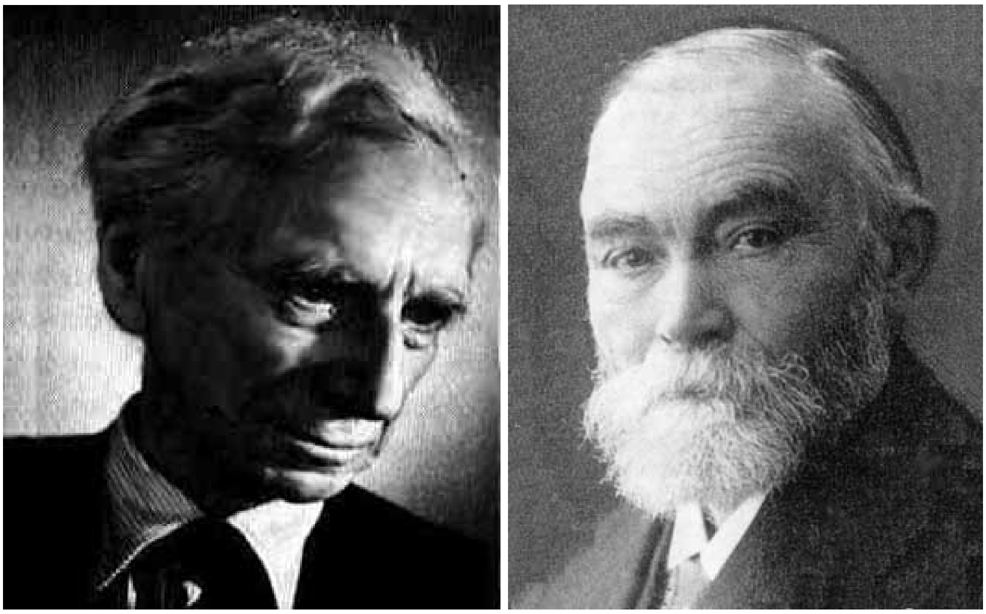
Russell skrev til Frege om sit paradoks og brevet kom, netop som det andet bind af *Grundlagen der Arithmetik* skulle trykkes. Frege havde kun tid til at skrive et kort appendiks til sin bog. Det begynder med ordene:

> En videnskabsmand kan næppe noget der er mere uhensigtsmæssigt end at måtte se grundlaget for sit arbejde falde sammen, netop som han er færdig. Jeg er blevet bragt i denne situation på grund af et brev fra hr. Bertrand Russell.

Man kan roligt sige at ordet 'uhensigtsmæssigt' var en mindre underdrivelse i denne sammenhæng. Det er blevet hævdet at der er tale om den største underdrivelse i matematiikens historie.

Russell kom selv med andre formuleringer af sit paradoks. Den mest populære er nok formuleringen om barberen i x-købing, der har et skilt på sin dør om at han barberer alle de borgere der ikke barberer sig selv. Skal barberen barbere sig selv? Hvis han gør det, så skal han ikke barbere sig selv. Hvis han ikke barberer sig selv, så skal han barbere sig selv!

Gottlob Frege gav sig til at revidere sit logiske system fra *Grundlagen der Arithmetik*, men desværre betød det at mange af resultaterne fra første bind ikke længere var gyldige. Og hvad værre var – systemet var ikke længere modsigelsesfrit. Det var nu blevet muligt at vise at en sætning var både sand og falsk. Denne triste konsekvens blev dog ført bevist efter Freges død i 1925.



Figur 7: Bertrand Russell (t.v.) og Gottlob Frege (t.h.)

Russells mængde R er også et eksempel på Cantors andet diagonaliseringsprincip! For vi kan lave et skema som i Figur 4.4. Her er der en indgang for hvert par af mængder (M_1, M_2) der angiver om M_1 er element i M_2 eller ej. F.eks. står der *nej* i feltet i 4. søjle, 3. række. Dette angiver at M_4 ikke er element i M_3.

Langs den store diagonal i skemaet står der *nej* ud for præcis de mængder som er med i Russells mængde R. Men alle mængder skal med i skemaet, så R må stå et sted i skemaet. Men hvad skal der stå i den store diagonal ud for R? Der kan ikke stå *ja*, for så har vi at R er element i R, og da skal der stå nej. Der kan heller ikke stå *nej*, for da skulle der stå *ja*!

Løsningen på Russells paradoks

Løsningen på Russells paradoks er, ligesom tilfældet var for Cantors paradoks, at indse at visse mængder simpelthen ikke er veldefinerede. Problemet er at der ikke er beskrevet noget *univers*, som mængder kan bygges af. I matematik vil man normalt altid vide, hvilket univers man har med at gøre – om vi har med f.eks. mængder af tal eller mængder af polygoner at gøre.

Bertrand Russell foreslog selv en form for *typeteori*, der kunne klassificere mængder. På denne måde skabte han samtidig en del af grundlaget for det typebegreb som findes i moderne programmeringssprog.

Russell starter med *grundtypen*, et univers, en samling af simple elementer,

	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5	$\ldots$	R
M_1	*ja*	*ja*	*ja*	*nej*	*ja*		
M_2	*ja*	*ja*	*ja*	*nej*	*ja*		
M_3	*ja*	*ja*	*ja*	*nej*	*ja*		
M_4	*ja*	*ja*	*ja*	*nej*	*ja*		
M_5	*ja*	*ja*	*ja*	*nej*	*ja*		
$\ldots$							
R							???

Figur 8: Et skema der viser Russells paradoks

hvorfra mængder kan dannes – de simple elementer kunne være de naturlige tal. Mængder af simple elementer af grundtype har type 0, mængder af mængder af type 0 har type 1 og så videre. Det er desuden ikke længere tilladt at tale om mængder af mængder uden at angive deres type. Så nu er Russells paradoks ikke muligt, for elementer i en mængde M vil altid have en anden og lavere type end M selv. Russells mængde R er udtryk for det, som man i programmeringssammenhæng ville kalde en *typefejl*.

Men Russels typeteori viste sig at være tung at danse med, og den spiller ikke længere nogen rolle i mængdeteori. En anden, langt mere levedygtig mængdeteoretiske løsning er *Zermelo-Fraenkel-systemet*, som det desværre vil føre for vidt at komme ind på her.

4.5 Burali-Fortis paradoks

Cesare Burali-Forti var en italiensk matematiker, der arbejdede sammen med Giuseppe Peano. I 1897 opdagede Burali-Forti sit paradoks, der ligner Russells paradoks.

Ordenstallene er de naturlige tal ordnet i den rækkefølge vi tæller dem i – $1, 2, 3, 4, \ldots$. Hvis vi har to ordenstal, x og y, skriver vi at $x < y$ hvis vi når x

før vi når hen til y, når vi tæller.

Men der findes også *uendelige ordenstal*. Det mindste uendelige ordenstal kalder vi ω. ω definerer vi som det mindste ordenstal, der er større end alle endelige ordenstal. Og nu er banen kridtet op til at definere uendeligt mange uendelige ordenstal – for vi kan tælle videre:

$$\omega + 1, \omega + 2, \omega + 3, \ldots$$

Det mindste ordenstal, der er større end alle disse ordenstal, kalder vi ω_1. Og vi kan tælle videre fra ω_2 – og så fremdeles.

Men kan vi også bruge dette princip på mængden af alle ordenstal? Er der et mindste ordenstal, β, der er større end dem?

Det er her, Burali-Fortis paradoks dukker op. For β, dette mindste ordenstal, der er større end alle ordenstal, er jo *selv* et ordenstal - og derfor må vi have at $\beta < \beta$ – en modstrid!

Løsningen på Burali-Fortis paradoks

Løsningen på Burali-Fortis paradoks er igen oplagt, nemlig at beslutte sig til at man ikke kan tale om mængden af alle ordenstal. For hvis vi antog denne mængdes eksistens, ville det give anledning til en modstrid. Samlingen af alle ordenstal er *ikke* en mængde! Også Burali-Fortis paradoks har haft stor betydning for mængdeteoriens udvikling – man skelner nemlig mellem *egentlige mængder*, som er samlinger, hvor man for ethvert element kan afgøre om det er medlem eller ej, og *klasser*, hvor man ikke kan afgøre medlemsskab. Russells mængde R er et andet eksempel på en klasse.

5 Paradokser om forudsigelse og fornuft

En del paradokser handler om forudsigelse af hændelser.

5.1 Krokodilleparadokset

Krokodilleparadokset blev allerede diskuteret i oldtiden. Her er det udtrykt som en lille historie:

> En mor er ude at gå tur med sit barn ved en flod, hvor der er krokodiller. En krokodille springer op af vandet og snupper barnet for at æde det. Men krokodillen er ærlig (og kan tale), for den siger herefter til moderen at hun kan få sit barn igen, hvis og kun hvis

> hun korrekt kan forudsige hvad den vil gøre med barnet. Moderen siger: Du vil æde mit barn.

Hvad skal den ærlige krokodille gøre? Hvis den giver moderen barnet igen, var forudsigelsen forkert, og da skal den spise barnet. Men så var moderens forudsigelse alligevel korrekt, og da skal den give moderen barnet tilbage!

Den sædvanlige slutning på historien er at krokodillen bliver så forvirret, at den slipper barnet. Moderen snupper barnet og skynder sig væk.

5.2 Newcombs paradoks

Det seneste og mest spøjse paradoks, der handler om forudsigelse, skyldes fysikeren William Newcomb og kaldes derfor for Newcombs paradoks. Filosoffen Robert Nozick var den første der analyserede det. Her er Newcombs paradoks udtrykt som en lille historie:

> En dag lander Omega, et supervæsen fra det ydre rum. Omega har avanceret udstyr der kan undersøge menneskets hjerne, og ved hjælp af det kan Omega forudsige med stor korrekthed hvordan et menneske vil vælge mellem flere muligheder.
>
> Omega præsenterer alle de mennesker, han møder, for samme valgsituation: Han viser vedkommende to æsker. Æske A er gennemsigtig og rummer 1000 kroner. Æske B er ikke gennemsigtig, og enten er den tom eller den indeholder 1 million kroner.
>
> Omega fortæller herefter sin forsøgsperson følgende: Du har to valgmuligheder:
>
> - Du kan tage begge æsker og beholde deres indhold. Men hvis jeg havde forudsagt at det var det, du ville gøre, lod jeg æske B være tom. Du får altså 1000 kroner med hjem.
> - Du kan tage æske B og lade æske A være. Hvis jeg havde forudsagt at det var det, du ville gøre, havde jeg lagt 1 million kroner i æske B. Så i denne situation får du 1 million kroner med hjem.

Hvad er det fornuftigste valg at træffe, hvis man er forsøgsperson? Her er to forskellige ræsonnementer, der begge virker helt fornuftige:

1. Omega kan tilsyneladende altid forudsige hvilket valg folk vil træffe. Hvis man tager begge æsker, får man kun 1000 kroner med hjem. Så

det kan bedst betale sig kun at tage æske B; så er jeg sikker på at blive millionær!

2. Omega har allerede lagt penge i æskerne inden han spurgte mig, og indholdet af æske B kan ikke ændre sig nu. Så jeg tager begge æsker. Enten får jeg 1000 kroner eller 1.000.1000 kroner – ingen af delene er dårlige.

Begge ræsonnementer er fuldstændig rationelle. Men de viser to helt forskellige syn på spørgsmålet om den frie vilje. Ræsonnement 1 er *deterministisk* – grundsynet her er at alt er forudbestemt. Ræsonnement 2 er *indeterministisk* – grundsynet er her at man som forsøgsperson har fri vilje.

Men paradokset viser også at det ikke er ligetil at finde ud af hvad det fornuftigste valg i en given situation er. På denne måde er Newcombs paradoks beslægtet med fangernes dilemma fra afsnit 7, der også viser at lige fornuftige argumenter kan være i åben indbyrdes modstrid.

6 Paradokser om sprog og betydning

De semantiske paradokser stammer fra *semantik*, læren om betydning i sprog. De handler alle om et semantisk begreb som f.eks. sandhed og er nært beslægtede med flere af de mængdeteoretiske paradokser ovenfor. For enhver påstand på formen

> Udsagnet A er sandt

kan oversættes til påstanden

> Udsagnet A er medlem af mængden af sande udsagn

6.1 Løgnerens paradoks

Løgnerens paradoks er formodentlig ikke opkaldt efter den, der opdagede det. Det blev diskuteret allerede i antikkens Grækenland, og i en variant påstår Epimenides – der selv var fra Kreta:

> Alle folk fra Kreta lyver.

Det paradoksale er at hvis påstanden er sand, så lyver Epimenides. Men dette er ikke et paradoks i sig selv; den eneste konklusion er at påstanden nødvendigvis må være falsk. Det paradoksale er derimod at påstanden er falsk, uanset om den antages at være sand eller falsk!

Epimenides levede i det 6. århundrede f.Kr. Legenden vil vide at han engang sov i 57 år!

Løgnerens paradoks holdt oldtidens filosoffer travlt beskæftiget. Den stoiske filosof Chrysippos skrev seks afhandlinger alene om dette paradoks. Filetas fra Kos grublede endog så meget over løgnerens paradoks at han døde ung. Selv apostelen Paulus havde hørt om Epimenides. I sit brev til Titus skriver han således:

> Der er en af deres egne, som har sagt: 'Kretensere lyver konstant, de er dyriske, griske og dovne'. Det er så sandt, som det er sagt …*(Titus 1:12-13)*

Der er dog ikke noget der tyder på at Paulus var klar over at der var et paradoks involveret.

I andre versioner er der et ægte paradoks, f.eks. i en version der tilskrives Eubulides fra Megara. Her er påstanden simpelthen:

> *Jeg lyver.*

En endnu mere anonym version af løgnerens paradoks er

> *Denne sætning er falsk.*

Denne påstand er sand hvis og kun hvis den er falsk. En af de tidlige computere som kunne løse logiske problemer, blev konstrueret i 1947 af to studerende fra Harvard ved navn William Burkhart og Theodore Kalin. For sjov bad de maskinen om at finde sandhedsværdien af løgnerens paradoks. Maskinen gav sig til at oscillere og lave hvad Kalin beskrev som 'et helvedes postyr'.

Endnu en version af paradokset er denne:

Lars: Helle har ret.

Helle: Lars lyver.

Denne version er interessant, da der nu ikke længere er tale om nogen form for selvreference. De foregående versioner, som vi har præsenteret her, taler alle om sig selv. Det er ikke længere tilfældet her.

Endelig et bramfrit eksempel hentet fra nyere dansk musik, nemlig slutningen af sangen *Chancetur* af Peter Sommer, hvor det, man kunne kalde en etisk udgave af løgnerens paradoks dukker op:

> Her er et råd fra et røvhul som mig
> Lad aldrig et røvhul vise dig vej [6]

Sangeren giver her et råd, som man skal følge hvis og kun hvis man ikke skal følge det.

6.2 Berrys paradoks

Berrys paradoks skyldes faktisk Bertrand Russell, der offentliggjorde det i 1906. Han navngav det efter G. Berry, der var bibliotekar på universitetet i Oxford. Bertrand Russell var interesseret i såkaldte *bestemte beskrivelser*, d.v.s. beskrivelser der betegner et entydigt givet objekt. F.eks. er beskrivelsen 'den inderste planet i solsystemet' en bestemt beskrivelse af Merkur, mens beskrivelsen 'en planet i solsystemet' ikke er en bestemt beskrivelse (men derimod en *ubestemt beskrivelse*.)

Betragt nu beskrivelsen

> Det mindste tal, der ikke kan beskrives med under toogtyve stavelser.

Er denne beskrivelse en bestemt beskrivelse? Hvis ja, så betegner den et tal. Men selvom dette tal ikke burde kunne beskrives med under 22 stavelser, har vi lige beskrevet det med kun 21 stavelser!

6.3 K. Grellings og L. Nelsons paradoks

Dette paradoks er egentlig en variation af Russells paradoks. Det stammer fra 1908 og beror på at nogle udtryk selv har den egenskab, de udtrykker, og derfor er udsagn om sig selv. F.eks. er ordet 'navneord' selv et navneord og 'dansk udtryk' selv et dansk udtryk. Sådanne udtryk kaldes *homologiske*. Andre udtryk har ikke denne egenskab – f.eks. er udtrykket 'elefant' jo ikke en elefant. Sådanne udtryk kalder man for *heterologiske*. Det er klart at alle udtryk enten er homo- eller heterologiske.

Men hvad nu med udtrykket 'heterologisk'? Hvis 'heterologisk' er heterologisk, må det betyde at udtrykket kan siges om sig selv – men så er det homologisk! Er udtrykket 'heterologisk' så homologisk? Hvis ja, så må det betyde at det kan siges om sig selv - og så er det . . . heterologisk.

6.4 Løsningen på de semantiske paradokser

Alle de semantiske paradokser her opstår fordi vi kan danne sætninger og udtryk der er *selvrefererende* eller *cirkulære*. Løsningen på dette problem er enten at forbyde selvreference og cirkularitet eller at opstille regler for hvilke former for selvreference og cirkularitet, man vil tillade. Der er f.eks. ikke noget paradoks i den selvrefererende sætning

> *Denne sætning består af seks ord.*

Figur 9: Alfred Tarski

Vi kan aldrig slippe uden om selvreference. I den morsomme og tankevækkende [3] bruger Douglas Hofstadter et helt kapitel på at diskutere selvreference i dagligsproget.

Selvreference er desuden et vigtigt princip i matematisk logik og datalogi; *rekursive funktioner* i programmeringssprog som f.eks. Pascal og ML er funktioner der kan 'kalde sig selv' undervejs og anvender således en form for selvreference.

Den polske matematiker og logiker Alfred Tarski (1902-1983) beskæftigede sig med hvordan man kunne tilskrive betydning til matematikkens sprog. Som mange andre europæiske akademikere rejste Tarski til USA ved optakten til 2. verdenskrig.

Alfred Tarski gav et vigtigt bud på at beskrive de situationer, hvor selvreference er et problem. Problemet, siger Tarski, skyldes at sprog kan være *for rige*. Når et sprog er tilstrækkelig udtrykskraftigt, kan det ikke være hvad man kalder *semantisk lukket* – det er ikke muligt at beskrive betydningen af alle ytringer i sproget inden for sproget selv. De selvrefererende ytringer er eksempler herpå.

Hvis man vil tilskrive alle ytringer i et sådant sprog en betydning, er man nødt til at bruge et andet sprog, et såkaldt *metasprog*. Det oprindelige sprog kalder man så *objektsproget*. Så udsagnet

> Jorden er rund

er et udsagn i objektsproget, mens udsagnet

> Udsagnet *Jorden er rund* er sandt

er et udsagn i metasproget.

Men metasproget er også et sprog. Hvis man vil tilskrive betydninger til ytringer i metasproget, skal man gøre det i et *meta-metasprog* – og så fremdeles. Rækken af disse metasprog er uendelig. Bemærk analogien til Russells typeteori med sit uendelige hierarki af typer – igen folder vi en selvreference ud til et uendeligt hierarki.

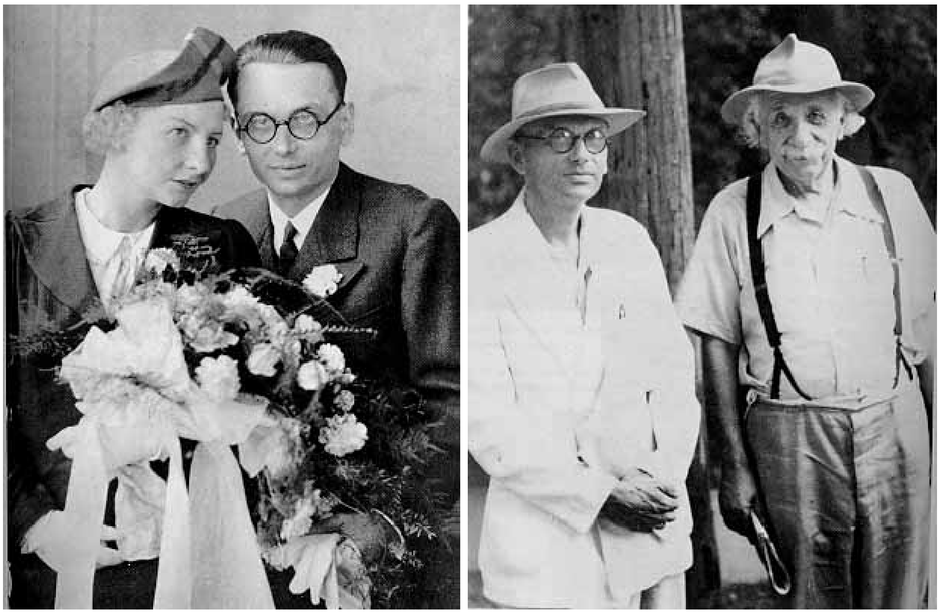
Tarskis analyse er blevet diskuteret og kritiseret lige siden han fremsatte den, men dens sondring mellem objektsprog og metasprog har haft enorm betydning i *semantik*, sprogenes betydningslære.

6.5 Kurt Gödel og løgnerens paradoks

Et af de bedst kendte matematiske resultater fra de seneste 100 år er Gödels ufuldstændighedssætning. Kurt Gödel (1906–1978) var en østrigsk matematiker, der startede sin karriere i Wien. Men også han rejste efter Hitlers magtovertagelse til USA. Han vendte for en kort stund tilbage til østrig for at blive gift, men måtte ved 2. verdenskrigs udbrud igen flygte til USA via Rusland og Japan. I USA blev Kurt Gödel ven med mange af de andre tyske og østrigske akademikere som var flygtet fra nazisterne – bl.a. Albert Einstein.

Men i sin tid i østrig, nemlig i 1931, viste Gödel flere negative resultater inden for matematisk logik. Det allermest kendte (og mest misforståede) resultat fra Gödels hånd er at et logisk system, der er udtryksfuldt nok til at kunne beskrive interessante egenskaber ved naturlige tal, vil rumme udsagn der ganske vist er sande men *ikke* vil kunne bevises alene ud fra reglerne i det logiske system.

Gödels resultater var triste. For de viste at de ideer som Frege og senere Russell havde gjort sig om at basere al matematik alene på logiske systemer ikke var tilstrækkelige – der vil aldrig være ét logisk system som vil kunne fange al matematik.



Figur 10: Kurt Gödel med sin kone Adele på bryllupsdagen i østrig og sammen med Albert Einstein i USA

Hvordan beviste Gödel sit resultat? Beviset er langt og snedigt, men hovedideen er faktisk enkel. Den er at bruge en variant af løgnerens paradoks, nemlig udsagnet

Dette er en påstand, der ikke kan bevises i det logiske system.

og formulere påstanden som en logisk formel i det logiske system. Denne påstand er nemlig sand hvis og kun hvis den ikke kan bevises.

For at kunne formulere påstanden i det logiske system, bliver man nødt til at nummerere formler – det er derfor, det logiske system skal kunne udtale sig om naturlige tal.

Så på en måde kan man sige at den tysktalende verden alligevel fik hævn over Russell – og det endda ved at benytte samme metode som Russell selv, nemlig et paradoks!

Matematikere har senere prøvet at vise Gödels resultat uden at bruge løgnerens paradoks. Et alternativt bevis skyldes den amerikanske matematiker Gregory Chaitin, der benyttede Berrys paradoks. Chaitin ville fremlægge sit bevis for Kurt Gödel, men nåede kun at have to korte telefonsamtaler med ham – kort tid efter var Gödel død. I den første telefonsamtale sagde Gödel til Chaitin:

> Det er ikke nødvendigt at bruge løgnerens paradoks for at kunne vise mit resultat – man kan bruge hvilketsomhelst paradoks!

7 Paradokser om fornuft og beslutninger

Der findes en lang række paradokser fra beslutningsteori og spilteori. Problemerne er både interessante for matematikere og for filosoffer.

7.1 Fangernes dilemma

Fangernes dilemma stammer fra 1950 og skyldes Melvin Dresher og Merrill Flood. Dresher og Flood arbejdede som forskere for det amerikanske firma Rand Corporation, der var blevet interesseret i den nye matematiske disciplin spilteori. Atombomben og den kolde krig var blevet centrale aspekter af storpolitikken, og store amerikanske firmaer var (og er) intimt forbundet med militære interesser. I Rand Corporation ønskede man at undersøge om spilteori kunne bruges til at lægge strategier for en atomkrig.

Fangernes dilemma er enkelt at formulere. To fanger, der begge er arresteret for samme forbrydelse og sidder i hver sin enecelle, får begge følgende tilbud:

> Hvis du tilstår, og den anden fange ikke tilstår, vil du blive løsladt og han vil få 5 års fængsel. Hvis ingen af jer tilstår, får I begge 2 års fængsel. Hvis I begge tilstår, får I begge 4 års fængsel.

Hvad skal fangerne gøre? De kan ikke kommunikere med hinanden og må træffe en beslutning alene baseret på egne overvejelser. Det paradoksale i denne situation er at begge fanger, hvis de hver især handler ud fra det tilsyneladende mest rationelle for dem hver især, begge havner i den for dem hver især værst tænkelige situation! Det kan med andre ord ikke betale sig at være egoist.

Fangernes dilemma har dannet basis for mange diskussioner. Alene i perioden 1960–1980 blev der skrevet over 1000 videnskabelige artikler om fangernes dilemma!

I [3] diskuterer Douglas Hofstadter fangernes dilemma og forskning i hvad computersimulering af et stort antal instanser af dilemmaet vil kunne fortælle os om de bedste strategier for fangerne.

7.2 Afstemningsparadokset

Afstemningsparadokset er et klassisk paradoks inden for beslutningsteori; det giver visse mindelser om et populært fjernsynsprogram, der foregår på en øde ø. En bestyrelse på tre personer, Anders, Birthe og Carl, skal vælge en formand. Det gør de ved først at vælge mellem Anders og Birthe og derefter vælge mellem vinderen af første afstemning og Carl.

Alle tre bestyrelsesmedlemmer vil gerne have formandsposten. Situationen er imidlertid speget på grund af medlemmernes øvrige ønsker:

- Anders ved at hvis han ikke kan blive formand, vil han foretrække Birthe frem for Carl.
- Birthe ved at hvis hun ikke kan blive formand, vil hun foretrække Carl frem for Anders.
- Og Carl håber selvfølgelig også på at kunne blive formand, men skulle det ikke kunne lade sig gøre, vil han foretrække Anders frem for Birthe.

Og den paradoksale konsekvens vil være at Carl *altid* bliver formand!

Øvelse 1. Kontroller at dette faktisk er tilfældet.

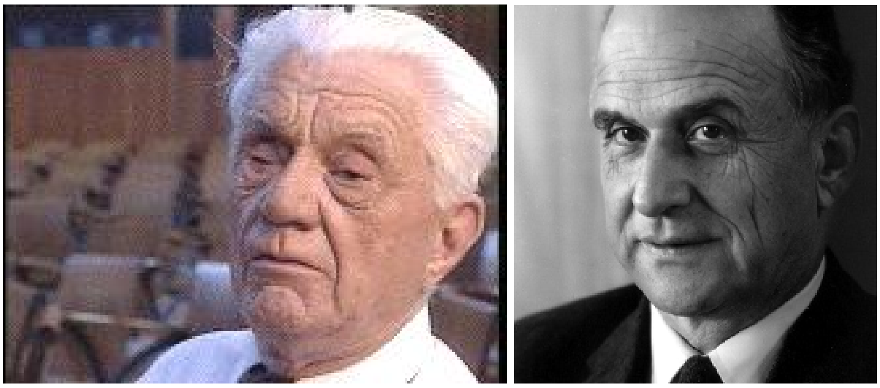
Afstemningsparadokset og varianter af det er blevet brugt som argument for at der ikke kan findes nogen demokratisk rimelig måde, der tillader en at vælge mellem tre eller flere alternativer.

Problemet er at vi har at gøre med en relation der *ikke er transitiv*. En relation R er transitiv hvis det gælder at hvis xRy og yRz så gælder det også at xRz. Der er masser af velkendte eksempler på transitive relationer – 'større end', 'tidligere end', 'ældre end' ...

Man skulle tro at relationen 'foretrækker frem for' ville være transitiv, men det er den som bekendt ikke!

8 Paradokser om det at formulere generelle love

En vigtig gren af filosofien er videnskabsteori. Her er man bl.a. interesseret i at finde ud af hvordan man drager konklusioner i videnskab. Blandt andet har man længe forsøgt at finde ud af hvordan man generaliserer i empiriske videnskaber, d.v.s. videnskaber der er baseret på erfaringer med den ydre verden. I alle former for videnskab stræber man efter generelle love, og de empiriske videnskaber er ingen undtagelse. I f.eks. fysik og kemi har man efterhånden fundet ikke så få 'naturlove'.



Figur 11: Carl Gustav Hempel (t.v.) og Nelson Goodman (t.h.)

Men hvad er det der fører os til at konkludere at et forslag til en generel lov faktisk er sandt? Det er de observationer, vi gør. Studiet af de måder, hvorpå vi prøver at *bekræfte* generelle videnskabelige påstande ud fra observationer kaldes for *konfirmationsteori* (ordet *konfirmation* betyder som bekendt bekræftelse.) Også konfirmationsteorien har sine paradokser.

8.1 Hempels paradoks

Carl Gustav Hempel (1905–1997) var en tysk filosof, der oprindelig var uddannet matematiker. I 1937, i kølvandet på Hitlers magtovertagelse rejste han til USA i lighed med mange andre prominente tyske akademikere. Hempel var oprindelig en stor tilhænger af den logiske positivisme, en videnskabsteoretisk skole der hævdede at det var muligt at foretage gyldige generalisationer på baggrund af logiske slutningsregler. Men allerede tidligt blev Hempel kritisk over for dette standpunkt.

Hempels paradoks udsprang heraf. Han betragtede påstanden

> Alle ravne er sorte.

Hvis vi observerer tre eller fire ravne, der er sorte, er denne påstand blevet svagt bekræftet. Men hvis vi har observeret flere millioner sorte ravne, er påstanden blevet stærkt bekræftet.

Hvad skal der til for at afkræfte påstanden? Egentlig ikke meget. Vi behøver kun at observere én eneste ravn, der ikke er sort.

Men er der andre måder at *bekræfte* påstanden på? Hvad hvis vi f.eks. observerer en grøn kålorm? Hempels pointe er at en grøn kålorm også er en observation, der er med til at bekræfte vores påstand. Hvorfor det?

Jo, påstanden

Alle ravne er sorte.

har samme sandhedsværdi som påstanden

Hvis noget ikke er sort, er det ikke en ravn.

De observationer som bekræfter denne nye påstand må derfor være præcis de samme påstande som bekræfter den foregående påstand. Så hver eneste gang vi observerer noget der ikke er sort og ikke er en ravn, er det med til at bekræfte påstanden. Men der er masser af muligheder for at finde noget der ikke er sort og ikke er en ravn. En grå kat, et rødt halstørklæde, et stykke hvidt papir, en brun hund, en messingfarvet standerlampe ... Hempel mente faktisk at hvis vi observerede en lilla ko, ville det øge sandsynligheden for at alle ravne var sorte!

Hempels amerikanske kollega Nelson Goodman (1906–1998), der også beskæftigede sig med konfirmationsteori, sagde om dette paradoks, at den mulighed, at man tilsyneladende ville kunne bedrive ornitologi uden at skulle gå ud i regnen var så tillokkende, at der simpelthen måtte være noget galt!

Hvad er der så galt? Hempel selv mente at problemet er at de to situationer, vi undersøger, ikke er symmetriske. Derfor bekræfter en ikke-sort ikke-ravn kun vores påstand en meget lille smule.

Andre filosoffer vil hævde at den lilla ko slet ikke bekræfter påstanden om at alle ravne er sorte. Den ville jo også ifølge Hempels ræsonnement bekræfte en påstand om at alle ravne var hvide! Hvordan kan den samme observation bekræfte to påstande der er i indbyrdes modstrid?

8.2 Bløn-paradokset

Bløn-paradokset stammer fra 1955; det kaldes også Hempel og Goodmans paradoks. De definerede den nye farve 'bløn'. En genstand er bløn hvis den opfylder to betingelser:

- Genstanden er grøn indtil nytårsaften år 2099.
- Herefter bliver genstanden med eet blå.

Vi kan opstille to bud på naturlove:

1. Alle smaragder er grønne
2. Alle smaragder er blønne

Hvilken lov er der mest grund til at tro på? Underligt nok er de to love lige velbekræftede! For hver eneste smaragd som vi nogen sinde har set bekræfter begge love – ingen har nogen sinde set et modeksempel. Det er slet ikke let at forklare præcis hvorfor lovforslag nummer 1 skulle være mere rimelig end lovforslag nummer 2.

9 Videre læsning

Skulle du have fået lyst til at læse mere, er her nogle bud på litteratur.

9.1 Bøger

Som i så mange andre tilfælde gælder det at de bedste bøger om paradokser ikke findes på dansk. Til gengæld er der rige muligheder for at læse noget spændende om paradokser på engelsk. Her vil jeg nævne et par stykker.

Martin Gardner: *aha! Gotcha*, W.H. Freeman, 1981 [2]

har været en vigtig inspirationskilde til disse noter og er et besøg værd. Gardners bog er – som Martin Gardners øvrige forfatterskab – præcis, informativ og underholdende. Bob Tappays sjove tegninger lever til fulde op til Gardners tekst. Nogle biblioteker har denne bog. Man kan også købe den f.eks. via de mange britiske og amerikanske WWW-boghandler.

Douglas Hofstadter. *Metamagical Themas*, Penguin Books 1985.

er en moppedreng af en bog, skrevet af den mand der afløste Martin Gardner som matematisk skribent i *Scientific American*. Bogens tykkelse skyldes til dels at Hofstadters skrivestil er meget snakkesalig. I et af bogens mange kapitler skriver Hofstadter om selvreference. For nogle år siden udkom et udvalg af bogens artikler på dansk.

R.M. Sainsbury: *Paradoxes*,Cambridge University Press, 1995 [5]

er en anderledes tør bog – en rigtig filosofibog. Mange af paradokserne i disse noter er behandlet meget udførligt i denne bog; til gengæld bærer Sainsburys tilgang præg af at han ikke har nogen matematisk baggrund men 'kun' er filosof.

Hvis man ønsker en matematikbog om paradokser, er der til gengæld matematik for alle pengene i

Barwise, J. og Etchemendy, J. *The Liar. An Essay on Truth and Circularity*, Oxford University Press, 1987.

Heri analyserer Barwise og Etchemendy, der er matematiske logikere, løgnerens paradoks ved hjælp af mængdeteoretikeren Peter Aczels teori om hypermængder.

9.2 WWW-sider

Der findes også et ikke helt lille antal WWW-sider om emner berørt her.

Et fremragende WWW-sted at opsøge, hvis man vil læse mere om matematikere som Cantor, Burali-Forti, Frege, Gödel og Russell, er

`http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/`

Dette sted, som hører hjemme på universitetet i St. Andrews i Skotland, er en guldgrube for oplysninger om matematikkens historie – biografier, billeder, gennemgang af udvalgte matematiske emner og så videre.

Der findes også et stort antal sider om paradokser. Her er nogle af dem:

- `http://www.paradoxes.co.uk/`
- `http://www.ronbarnette.com/Zeno/zeno.html`
- `http://plato.stanford.edu/entries/russell-paradox/`
- `http://plato.stanford.edu/entries/prisoner-dilemma/`

De sidste to henvisninger er til opslag om henholdsvis Russells paradoks og fangernes dilemma. Disse opslag stammer begge fra et grundigt WWW-leksikon om filosofi, der findes på universitetet i Stanford i USA.

Litteratur

[1] Barwise, J. og Etchemendy, J. *The Liar. An Essay on Truth and Circularity*, Oxford University Press, 1987.

[2] Gardner, M. *aha! Gotcha*, W.H. Freeman, 1981.

[3] Hofstadter, D. *Metamagical Themas*, Penguin Books 1985.

[4] Lübcke, P. (red.). *Politikens Filosofileksikon*, 1. udgave, 2. oplag. Politikens Forlag, 1988.

[5] Sainsbury, M. *Paradoxes*, Cambridge University Press, 1995.

[6] Sommer, P. *Til Rotterne, Til Kragerne, Til Hundene*, cd-musikalbum, Genlyd 2008.